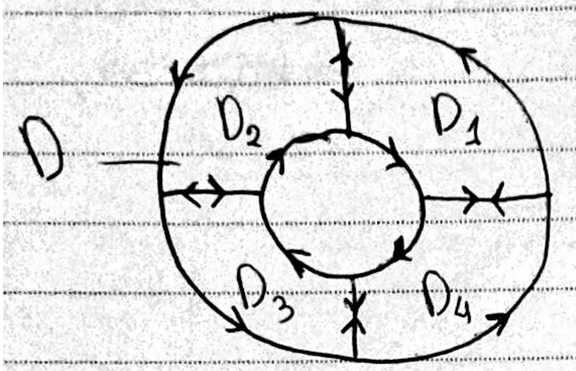
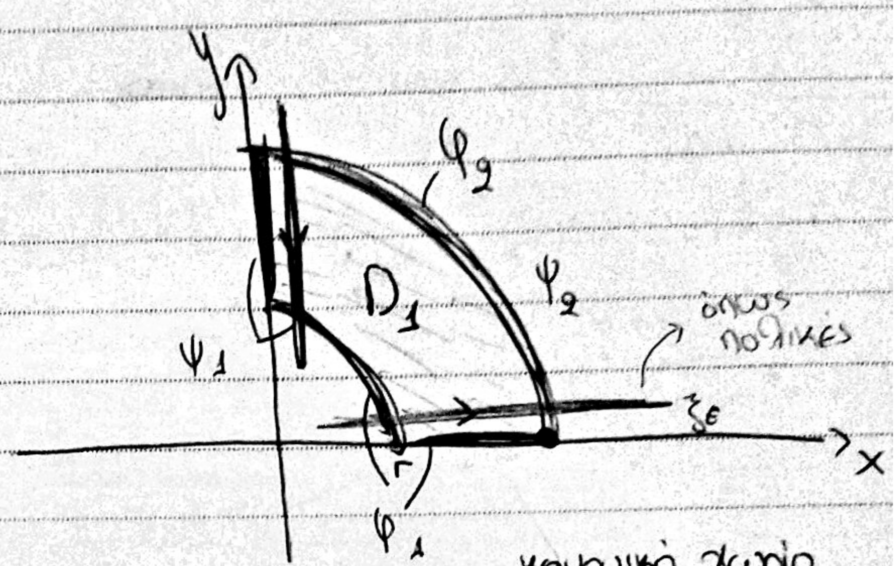
22/05/2017

Μάθημα 21ο
Απει4

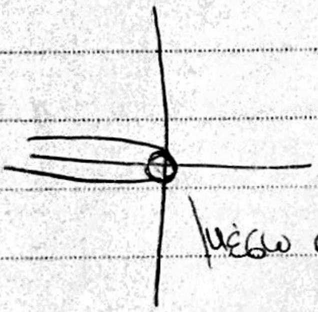


Σχήμα 1.



Σχήμα 2.

κανονικό χωρίο (όχι (1))

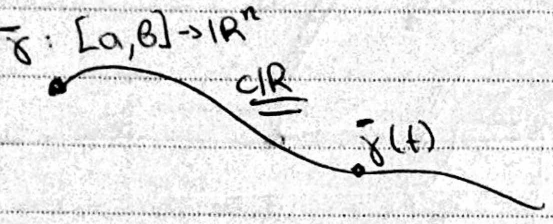


μέσω οριακής διαδικασίας

<u>Παρατήρηση:</u> Αν στο δακτύλιο αυτόν χρησιμοποιήσουμε τις παραμετρικοποιήσεις του συνόρου ως γραφήματα συναρτήσεων δηλ. π.χ., $\varphi_2(x)=\sqrt{R^2-x^2}$, $x\in[0,R]$, βλέπουμε ότι η φ δεν είναι C^1, αφού για $x=R$ δεν έχει παράγωγο.
Αυτό μπορεί να αντιμετωπισθεί αν χρησιμοποιήσουμε το Θ. Green σε ένα $U_\varepsilon \subset D_1$ που αποκλείει τα προβληματικά σημεία $(r,0)$ και $(R,0)$ (και αντίστοιχα για κανονικό χωρίο ως προς y) και περάσουμε (αφού εφαρμόσουμε το Θ. Green) στο όριο $\varepsilon \to 0$ έτσι ώστε $U_\varepsilon \to D_1$, βλ. σχήμα 2.

Επιφανειακά Ολοκληρώματα.

«Χύμα»: Μια επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ είναι «το αντίστοιχο» μιας καμπύλης στον $\mathbb{R}^2$, όπου η επιφάνεια είναι «κάτι» το διδιάστατο, ενώ μια καμπύλη κάτι το μονοδιάστατο.



Διδιάστατο $\to$ εξαρτάται από δύο παράγοντες (παραμέτρους)
μονοδιάστατο $\to$ εξαρτάται από έναν παράγοντα. (παράμετρο)

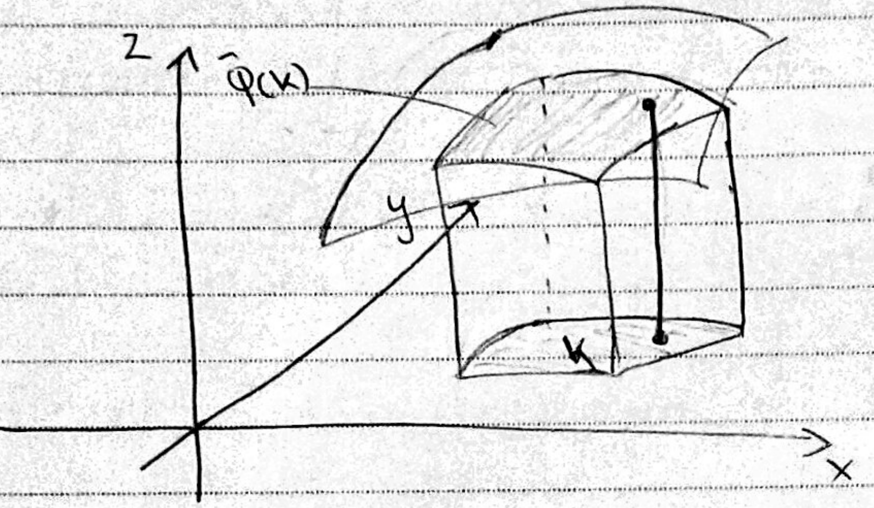
Ορισμός: Έστω $K \subset \mathbb{R}^2$, $K \neq \emptyset$, συμπαγές, J-μετρήσιμο, $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοιχτό, $K \subset U$ και:
$\bar{\Phi} : U \to \mathbb{R}^3$ μια C^1-διανυσματική συνάρτηση. Τότε η $\bar{\Phi}|_K$ ονομάζεται παραμετρική επιφάνεια $\bar{\Phi}$ με παραμετρικό πεδίο K και η εικόνα της $\bar{\Phi}(K) \subset \mathbb{R}^3$ θα ονομάζεται επιφάνεια (ή καλύτερα σχήμα επιφάνειας) στον $\mathbb{R}^3$ με παραμετροποίηση:

$$\bar{\Phi}|_K : K \to \mathbb{R}^3$$

Παράδειγμα 1 (SOS)

Έστω $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f: U \to \mathbb{R}$ μια C^1 συνάρτηση και $K \subset U$ συμπαγές και J-μετρήσιμο. Τότε η $\bar{\Phi}(x,y) = (x, y, f(x,y))$, $(x,y) \in K$ είναι μια παραμετρική επιφάνεια, και το

$\Gamma_{f|K} = \bar{\Phi}(K) = \{ (x, y, f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in K \}$



Παράδειγμα 2 (SOS)

$$H \quad \bar{\Phi}(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \overbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}^{,,\bar{a}} + \mu \overbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}^{,,\bar{b}} \in \mathbb{R}^3 \quad ⊛$$

το $\bar{\Phi}(\mathbb{R}^2) = \{ \bar{\Phi}(\lambda,\mu) : (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \}$, δηλ. το <u>επίπεδο</u> που περνάει από το $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ και παράγεται από τα $\bar{a}, \bar{b}$

(⊛ $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ είναι η παραμετρική επιφάνεια που έχει σαν εικόνα...

Παρατήρηση: ΠΡΟΣΟΧΗ!

Ο πιο πάνω ορισμός και επιφάνειες που ουσιαστικά είναι «μονοδιάστατες», π.χ. στο παράδειγμα 2 αν $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, το $\bar{\Phi}(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ θα είναι ευθεία.

Πράγματι, όπως θα δούμε, για να είναι η $\bar{\Phi}: K \to \mathbb{R}^3$ «κανονική» επιφάνεια θα πρέπει για την παραμετροποίησή της να χρειάζονται απαραίτητα δύο παράμετροι.

Παράδειγμα 3 (SOS)

Μια από τις σημαντικότερες επιφάνειες που δεν μπορεί να παραμετροποιηθεί (σχεδόν) ολόκληρη ως γράφημα συνάρτησης είναι η σφαίρα:

$$S := \partial B\left((x_0,y_0,z_0), r\right) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)\| = r\}$$

$$\bar{\Phi}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$(\theta,\varphi) \in [0,\pi] \times [0,2\pi] \subset \mathbb{R}^2$$

- Για να μελετήσουμε καλύτερα επιφάνειες χρειαζόμαστε τον εξής ορισμό:

Ορισμός: Έστω $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Τότε το διάνυσμα:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\text{"}=\text{"} \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

ονομάζεται <u>διανυσματικό γινόμενο</u> (vector product) ή <u>εξωτερικό γινόμενο</u>.

<u>Ιδιότητες (Άσκηση)</u>

(α) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$

(β) $\bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}$

(γ) $(\lambda \bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda \bar{b}) = \lambda (\bar{a} \times \bar{b})$

(δ) $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$

(ε) $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$

(στ) $\bar{a} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{b} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = 0$

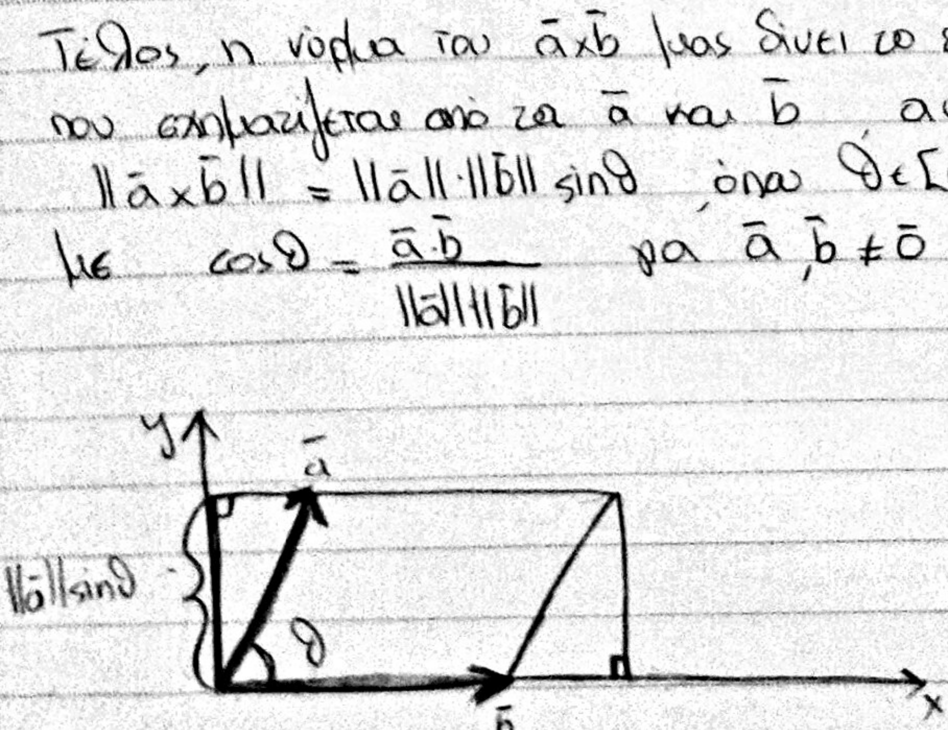
<u>Επίσης</u>, σε ένα δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς (όπως π.χ. το $\{\bar{0}, \underset{(1,0,0)}{\bar{e}_1}, \underset{(0,1,0)}{\bar{e}_2}, \underset{(0,0,1)}{\bar{e}_3}\}$), η κατεύθυνση/διεύθυνση/φορά του $\bar{a} \times \bar{b}$ δίνεται από τον «κανόνα του δεξιού χεριού» όπως φαίνεται π.χ. από τα

$$\bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{e}_3$$

Τέλος, η νόρμα του $\bar{a} \times \bar{b}$ μας δίνει το εμβαδό του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τα $\bar{a}$ και $\bar{b}$ αφού

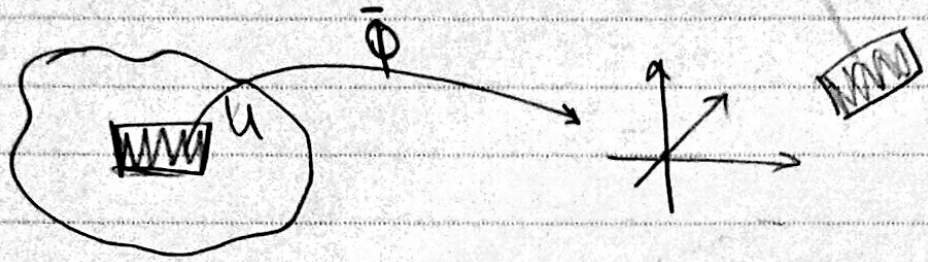
$\|\bar{a} \times \bar{b}\| = \|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\| \sin\theta$, όπου $\theta \in [0, \pi]$ η γωνία μεταξύ $\bar{a}, \bar{b}$

με $\cos\theta = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{a}\| \|\bar{b}\|}$ για $\bar{a}, \bar{b} \neq \bar{0}$



<u>Ορισμός</u>: Έστω μια επιφάνεια $\bar{\Phi} : K \to \mathbb{R}^3$ (C^1, $K \subset U \subset \mathbb{R}^2$, U ανοικτό, K συμπαγές, J μετρ.)

$$\bar{\Phi}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \Rightarrow D\bar{\Phi}(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial z(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$



$$\underbrace{\begin{matrix}\dfrac{\partial x(u,v)}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z(u,v)}{\partial u}\end{matrix}}_{=\dfrac{\partial \Phi(u,v)}{\partial u}} \qquad \underbrace{\begin{matrix}\dfrac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z(u,v)}{\partial v}\end{matrix}}_{=\dfrac{\partial \Phi(u,v)}{\partial v}}$$